Sei $\mathbb{N}_0^9 := \{0,1,...,9\}$ und sei $\varrho_k : \mathbb{N}_0^9 \longrightarrow \mathbb{N}_0^9$ für $k \in \mathbb{N}_0^9$ definiert durch $\varrho_k(i) := \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$

Behauptung:

Es gibt genau eine Funktion $f: \mathbb{N}_0^9 \longrightarrow \mathbb{N}_0^9$ mit der Eigenschaft

(1) $f(k) = \sum_{i=0}^{9} \varrho_k(f(i)) \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0^9$

und für diese gilt: $f(0) := 6$, $f(1) := 2$, $f(2) := 1$, $f(6) := 1$ und $f(i) := 0$ sonst.

Beweis:

Wir beweisen zunächst vier Hilfssätze:

(2) Beh.: Sei $k \in \mathbb{N}_0^9$ mit $f(k) > 0 \Longrightarrow \exists\, j \in \mathbb{N}_0^9$ mit $f(j) = k$

Bew.: Aus (1) folgt $0 < f(k) = \sum_{i=0}^{9} \varrho_k(f(i))$, d.h. $\exists$ mindestens eine Zahl $j \in \mathbb{N}_0^9$ mit $\varrho_k(f(j)) > 0$, d.h. $f(j) = k$

(3) Beh.: Sei $k \in \mathbb{N}_0^9$ mit $f(k) = 0 \Longrightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}_0^9$ gilt $f(i) \neq k$

Bew.: Aus (1) folgt $0 = f(k) = \sum_{i=0}^{9} \varrho_k(f(i))$, d.h. $\varrho_k(f(i)) = 0 \ \forall\, i \in \mathbb{N}_0^9 \Longrightarrow f(i) \neq k \ \forall\, i \in \mathbb{N}_0^9$

(4) Beh.: $\sum_{i=0}^{9} f(i) = 10$

Bew.: $\sum_{k=0}^{9} f(k) = \sum_{k=0}^{9} \sum_{i=0}^{9} \varrho_k(f(i)) = \sum_{i=0}^{9} \sum_{k=0}^{9} \varrho_k(f(i)) = \sum_{i=0}^{9} 1 = 10$

(5) Beh.: $f(0) \neq 0$

Bew.: Angenommen $f(0) = 0$. Dann ist $\varrho_0(f(0)) = \varrho_0(0) = 1$ und damit folgt aus (1)

$0 = f(0) = \sum_{i=0}^{9} \varrho_0(f(i)) >= 1$ - Widerspruch!

Wir betrachten nun alle möglichen Fälle $f(0) = k$ für $1 \leqslant k \leqslant 9$:

Aus (1) folgt $k = f(0) = \sum_{i=0}^{9} \varrho_0(f(i))$, d.h. es gibt genau k verschiedene Zahlen $i_1, i_2, ..., i_k \in \mathbb{N}_0^9$ mit $f(i_j) = 0$ für $1 \leqslant j \leqslant k$ und damit genau (10 - k) verschiedene Zahlen $i_{k+1}, i_{k+2}, ..., i_{10} \in \mathbb{N}_0^9$ mit $f(i_j) > 0$ $(k + 1 \leqslant j \leqslant 10)$.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i_{k+1} = 0$. Dann folgt aus (2) und (3), dass die (10 - k - 1) paarweise verschiedenen und von 0 verschiedenen Zahlen $i_{k+2}, ..., i_{10}$ als Funktionswerte $f(i_j)$ für die (10 - k) verschiedenen Argumentwerte $i_{k+1}, i_{k+2}, ..., i_{10}$ auftauchen.

Es folgt aus (4): $10 = \sum_{i=0}^{9} f(i) = \sum_{j=1}^{10} f(i_j) = f(0) + f(i_{k+2}) + ...f(i_{10})) = k + f(i_{k+2}) + ... + f(i_{10})$, d.h. die Zahl 10 muss sich als Summe von (10 - k) Summanden darstellen lassen, von denen einer k ist und genau einer doppelt auftaucht.

Wir untersuchen jetzt die einzelnen Fälle:

k = 1: kleinste mögliche Summe, die obiger Bedingung genügt ist $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 > 10$

k = 2: $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 > 10$

k = 3: $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 10$

k = 4: $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 > 10$

k = 5: $1 + 1 + 2 + 3 + 5 > 10$ (k = 5 muss vorkommen!)

k = 6: $1 + 1 + 2 + 6 = 10$ (ist einzige Möglichkeit für k = 6 und ergibt obige Lösung)

k = 7: $1 + 1 + 7 < 10$ und $2 + 2 + 7 > 10$ sind die einzigen Möglichkeiten

k = 8: $8 + 8 > 10$

k = 9: $9 < 10$

q.e.d.